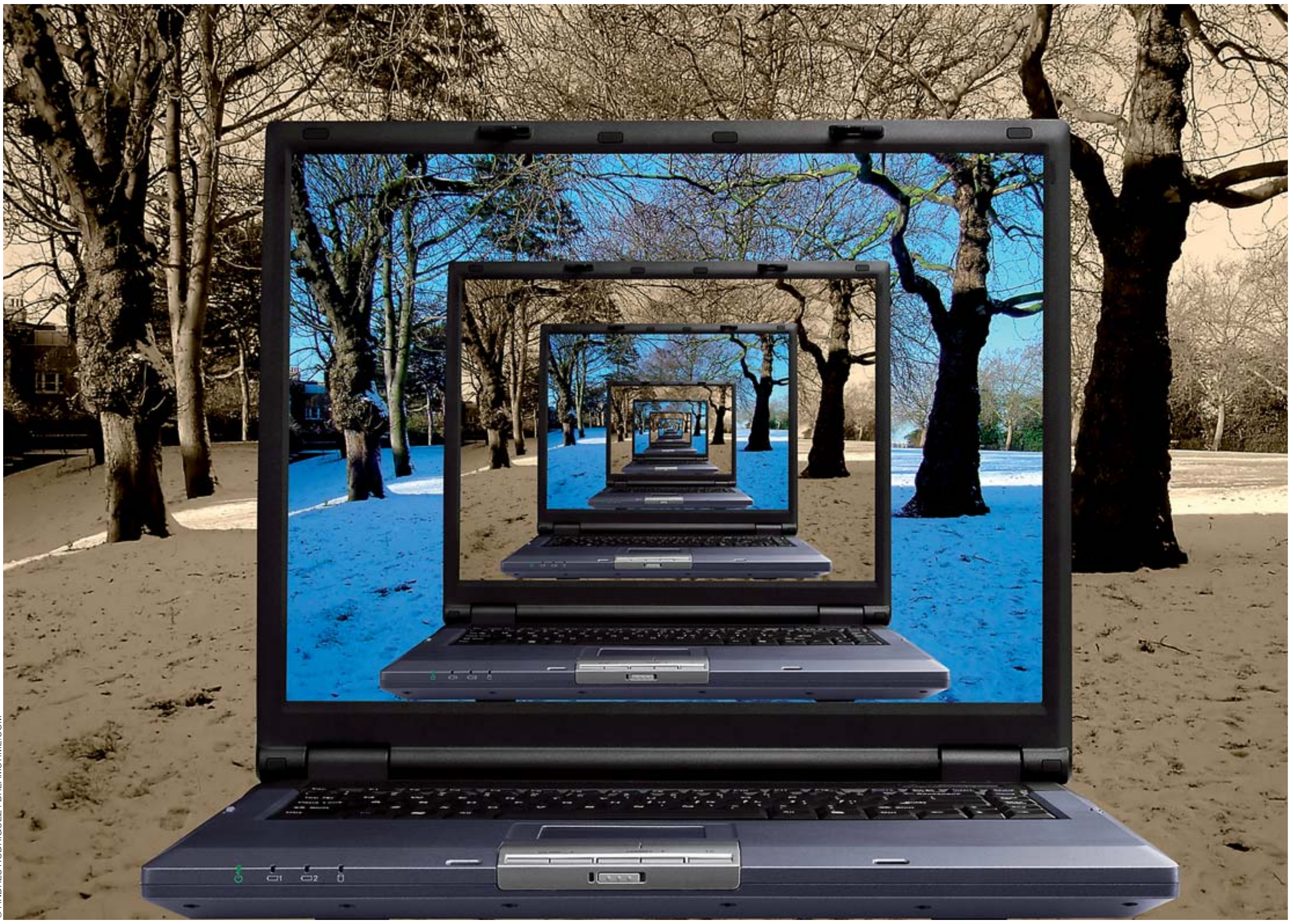


© ANDRES RODRIGUEZ | DREAMSTIME.COM

Мерцающий компьютер бесконечности

НОВАЯ АРИФМЕТИКА РАСШИРЕННОЙ ЧИСЛОВОЙ СИСТЕМЫ

Леонид Левкович-Маслюк

Бесконечность — дело тонкое, и всякие вольности в обращении с ней выглядят крайне вульгарно. Беда в том, что в математике, особенно в той, что нужна инженерам и естественнонаучникам, вы натыкаетесь на бесконечность на каждом шагу. Чтобы вывести (или хотя бы осмысленно применять) формулы для расчета окружающих нас строений, устройств, механизмов, нужно владеть предельными переходами, решать дифференциальные уравнения, вычислять интегралы, суммировать ряды. Матанализ, первейший инструмент инженера-практика, прочно и глубоко связан с абстрактным и труднопостижимым понятием бесконечности, а уж почему так получилось — этот вопрос лучше адресовать куда-нибудь повыше.

Конечно, в прикладных разделах математики (да и в большинстве теоретических) бесконечность в мистически-пафосном смысле этого слова уже давно и тщательно заметена под ковер. Лучшие умы математики к середине-концу XIX века в основном придали математическому анализу его современную форму, где в рассуждениях и вычислениях фигурируют только конечные величины вместо понятных лишь гениям вроде Ньютона «моментов флюксий». Тем не менее бесконечность как концепция никуда не девается, она таится где-то в глубине, как кащеева игла, и вокруг нее витают темные флюиды логических туманностей и парадоксов, иногда очень эффектных — чего стоит хотя бы знаменитый парадокс Банаха-Тарского (см. стр. 26). Эти туманности, некогда привлекавшие широкое внимание, по-прежнему исследуют энтузиасты — но надо признать, что мода на разработку предмета с гордым названием «основания математики» прошла. Сегодня мало кто верит, что именно на этом пути, истоптанном титанами прошлого, найдется что-нибудь такое, что поможет радикально улучшить математику не в части логического обоснования, а в части прикладных результатов, — другими словами, поможет разработать новый математический язык, позволяющий выразить нечто совершенно новое об, извините за высокий слог, устройстве мира. Впрочем, за эксперименты с бесконечностью охотно берутся увлеченные непрофессионалы; часто — увлеченные катастрофически и безвозвратно. Увы, их писания обычно непригодны

СЕРГЕЕВ ВОПЛОТИЛ В ЖИЗНЬ МЕЧТУ, ЧАСТО ПОСЕЩАЮЩУЮ ШКОЛЬНИКОВ И МАТЕМАТИКОВ-ПЕРВОКУРСНИКОВ, — ПРИДУМАЛ АРИФМЕТИКУ, ОБЪЕДИНЯЮЩУЮ КОНЕЧНЫЕ И БЕСКОНЕЧНЫЕ ЧИСЛА. ОН ДАЖЕ РАЗРАБОТАЛ КОМПЬЮТЕР, ВЫПОЛНЯЮЩИЙ ОПЕРАЦИИ ЭТОЙ АРИФМЕТИКИ

для таких журналов, как наш, столь же болезненно увлеченных идеей искать везде и всюду зерна рациональности или хотя бы вменяемости.

Работу математика Ярослава Сергеева, о которой мы сегодня рассказываем, нельзя отнести ни к одному из этих направлений мысли. От первого из них она отличается наглядностью и практической (по замыслу, по крайней мере) ориентированностью, от второго — полным соответствием научным стандартам. Сергеев воплотил в жизнь мечту, часто посещающую школьников и математиков-первокурсников, — придумал арифметику, объединяющую конечные и бесконечные числа. Более того, он разработал (и запатентовал!) конструкцию компьютера, выполняющего операции этой арифметики.

Рецензенты работ Сергеева предрекают, что на основе его результатов будет создано «множество новых мощных инструментов в анализе, информатике, теории множеств, теории измерений». Вполне возможно, что так и произойдет, но нельзя забывать, что такие прогнозы — дело очень неблагодарное. Энтузиазм по поводу перспектив *нестандартного анализа* — аппарата, созданного в 1960-е годы для введения в матанализ бесконечно малых и бесконечно больших чисел (см. врезку «Реинкарнация грифонов»), — был велик. Сегодня нестандартный анализ жив, но великих надежд с ним уже не связывают.

Ниже мы расскажем об одном из первых приложений «бесконечных чисел» Сергеева — вычислении с их помощью геометрических характеристик фракталов, как классических, так и более общих, *мерцающих* (blinking fractals). Но прежде давайте разберемся в конструкции новой числовой системы.

∞+1>∞

Поясняя мотивы для разработки своей системы, Сергеев приводит пример арифметики, используемой одним из живущих в дельте Амазонки племен. Индейцы племени Пираха (Pirahã) считают так: один, два, много. Для них и 1 + 2 = много, и 2 + 2 = много. Что такое 3 или 4, они не представляют. Сергеев уверен, что этот примитивный способ счета очень важен для нас, потому что дает отличную аналогию с современным понятием бесконечности. Действительно, в системе счета Пираха операции много + 1 и много + 2 дают один и тот же результат: много. Нечто похожее мы имеем и в современной математике: $\infty + 1 = \infty$ и $\infty + 2 = \infty$. Это сравнение наводит на следующую простую мысль: как индейцы Пираха не могут различить числа 3, 4, 5 и т. д. из-за неразвитости их системы записи конечных чисел, так и мы не можем различить бесконечные числа из-за неразвитости наших способов представления бесконечности. Именно поэтому возникают проблемы при вычислениях, связанных с бесконечно большими и бесконечно малыми величинами: невозможность их представления в памяти компьютера, необходимость введения понятия предела, неопределенные формы типа $\infty - \infty$ и т. д., заключает Сергеев.

В основе конструкции Сергеева, призванной исправить дело, лежит *гросс-единица* (grossone), обозначаемая ①. Гросс-единица — это бесконечное число, равное по определению количеству элементов в множестве N натуральных (то есть целых положительных) чисел. Это определение надо понимать в дословном, буквальном смысле, то есть предполагать, что N имеет вид: {1, 2, 3, …, ① — 1, ①}. Другими словами, ① — это «самое большое натуральное число». Оно и выбирается в качестве основания новой системы исчисления. Ну а дальше — точно так же, как мы записываем числа в десятичной системе, а компьютер в двоичной, произвольные бесконечно малые и бесконечно большие числа представляют собой «записи» (records) вида:

$$C = c_{p_m}①^{p_m}\ldots c_{p_1}①^{p_1}c_{p_0}①^{p_0}c_{p_{-1}}①^{p_{-1}}\ldots c_{p_{-k}}①^{p_{-k}} \quad (1)$$

В этой записи p — «гросстепени», а c — «гроссцифры». Отличие от десятичной или двоичной систем в том, что «гроссцифры» не фиксированные заранее, а произвольные «обыкновенные» числа, записываемые с помощью конечного числа знаков. «Гросстепени», в свою очередь, это либо записи вида (1), либо снова «обыкновенные» конечные числа. Таким образом, числа в форме (1) всегда представляются конечным числом символов. Конечность записи принципиальна для этой конструкции, подчеркивает Сергеев, — она призвана учесть

СПРАВКА

Ярослав Серегеев занимает должность «полного профессора», учрежденную в Университете Калабрии (Италия) для приглашения выдающихся ученых. Он также профессор Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского, доктор физико-математических наук, специалист по численному анализу, параллельным вычислениям, глобальной оптимизации, автор более 150 научных публикаций, среди которых 50 статей в международных журналах и три книги. Сергеев — один из организаторов и координатор Российско-Итальянского университета, действующего при Нижегородском университете.

Арифметике бесконечностей посвящен ряд его недавних работ, в том числе статья «Blinking fractals and their quantitative analysis» (Chaos, Solitons & Fractals, 33(1), 50-75, 2007), использованная в этом материале. См. также wwwinfo.deis.unical.it/~yaro/arithmetic.html, www.grossone.com. ■

тот факт, что и человек, и компьютер способны выполнить лишь конечное число операций. В этом, кстати, существенное отличие от нестандартного анализа, который дополняет бесконечностями обычное множество вещественных чисел, построенное с помощью бесконечных десятичных дробей (или эквивалентных конструкций).

Сергеев с самого начала оставляет за скобками своих построений понятия счетного и несчетного множеств, взаимно однозначные соответствия и тому подобные базовые концепции привычной канторовской теории множеств. В его числовой системе, опять-таки в прямом и буквальном смысле слова, соблюдается древний постулат «часть всегда меньше целого». Например, число ① + 1 строго больше числа ①, а множество натуральных чисел можно расширить так:

$$\widehat{\mathrm{N}}=\{1,2,\ \ldots,\text{①}-1,\text{①},\text{①}+1,\ \ldots,\text{①}^2-1,\text{①}^2,\text{①}^2+1,\ \ldots\}$$

Записи вида (1) позволяют очень аккуратно сравнивать «маленькие бесконечности». Например, в обычной теории множеств совокупность всех натуральных чисел и совокупность четных положительных чисел неразличимы по так называемой *мощности*, и то и другое — счетные множества. Здесь же постулируется, что второе из этих множеств содержит ровно ①/2 элементов, то есть вдвое меньше, чем первое. Аналогично, множество всех положительных чисел вида, например, (6K+3) будет состоять из (①/6) элементов; а если к нему добавить еще три числа другого вида, полученное множество будет состоять уже из (①/6 + 3) элементов.

1/① — простейшее по записи бесконечно малое («инфинитезимальное») число. Арифметика записей (1) устроена самым естественным образом — они перемножаются и складываются так, как если бы вместо ① стояло обыкновенное число. Тонкости начинаются при суммировании бесконечных рядов. Согласно одному из самых интересных постулатов теории Сергеева, любой процесс (в том числе и процесс суммирования ряда) может включать не более чем ① шагов. В частности, параллельные процессы в этой модели принципиально более мощны, чем одиночные, последовательные, — ведь K параллельно идущих процессов позволяют выполнить (K*①) шагов. В этом же постулате о процессах скрыта и очевидная связь рассматриваемой модели с аксиомой выбора — источником множества трудностей и, в частности, «виновницей» парадокса Банаха-Тарского. Можно осторожно предположить, что настоящие теоретические трудности в согласовании концепций Сергеева с остальной математикой относятся именно к этим вопросам — но мы в них углубляться, разумеется, не будем. Во всяком случае, парадокс Банаха-Тарского в теории Сергеева не возникает — дело в том, что точки, из которых состоят шары, в данном случае можно просто пересчитать, выразив их количество соответствующей записью вида (1), и это не позволяет выполнять трюки с производством предметов из ничего.

Чуть позже мы приведем примеры прямого подсчета точек во фрактальных объектах, а пока черкнем еще пару формул. В любое выражение мы теперь можем подставлять не только конечные, но и бесконечные числа — и приписать вполне определенные значения как «стремящимся к бесконечности» в традиционном смысле слова рядам и функциям, так и рядам, которые вообще не имеют традиционного предела. Например, предел

$$\lim_{n\to+\infty} (-1)^n n$$

как известно, не существует. Однако с помощью записей (1) можно точно выразить значение этой последовательности в любой бесконечной точке: при n=① получаем ①, при n=①-1 получаем -① +1 и т. д.

Но содержат ли такие записи в новой арифметике действительно новую информацию о классических выражениях? Очень важный вопрос. Ответ на него даст только предстоящая история развития этого аппарата. Впрочем, уже существуют примеры описания наглядных геометрических конструкций — фрактальных процессов — при помощи новой числовой системы.

ПАРАДОКС БАНАХА-ТАРСКОГО

Так называется строгая теорема, согласно которой обычный шар в трехмерном пространстве можно разделить на несколько подмножеств, а потом сложить из них (перемещая их как твердое тело) два в точности таких же шара. Доказательство основано на *аксиоме выбора*, постулирующей некоторые операции с бесконечными множествами и широко используемой в современной математике.

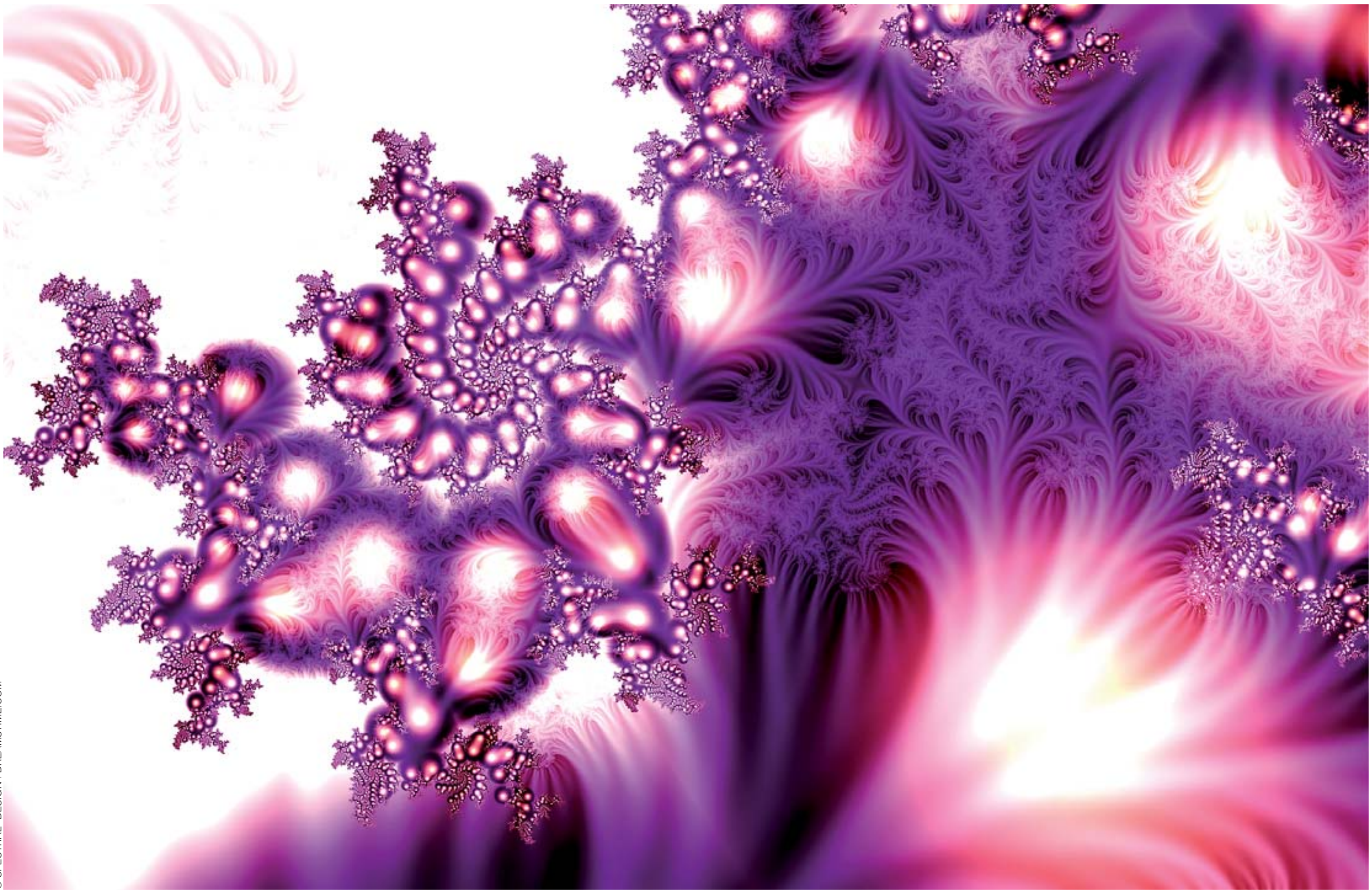
ОТСЧЕТ МЕРЦАЮЩИХ КВАДРАТИКОВ

В известном фильме Питера Гринуэя «Отсчет утопленников» («Drowning by numbers») персонажи монотонно и без особых хлопот применяют друг к другу одну и ту же элементарную операцию — утопление. По духу это очень напоминает классические конструкции фракталов — геометрических объектов, ставших популярными в последние десятилетия в самых разных областях науки и практики. Строгое математическое определение фракталов очень скучное, а интересны они тем, что чаще всего обладают свойством самоподобия: состоят из небольшо-

РЕИНКАРНАЦИЯ ГРИФОНОВ

Вышедшая в 1987 году книга Владимира Успенского «Введение в нестандартный анализ» начиналась с вопроса: «Относятся ли грифоны и единороги к позвоночным?», который иллюстрировал экзотичность темы. В то время слово «грифон» было редким, индустрия фэнтези еще не вышла на книжный рынок, да и самого книжного рынка в России еще не было, да и сама Россия была еще Советским Союзом. Все с тех пор изменилось, а вот арифметика бесконечностей осталась экзотическим предметом — несмотря на то, что нестандартный анализ разрабатывался рядом крупных математиков начиная с 1960-х годов и популярность его была довольно высока.

Нестандартный анализ основан на системе «гипердействительных чисел», содержащей бесконечно малые и бесконечно большие величины и допускающей использование необходимых в анализе функций и эффективное решение уравнений. Построение гипердействительных чисел основано на сложной классификации бесконечных последовательностей обычных действительных чисел. При помощи этого аппарата были решены несколько серьезных задач функционального анализа, его использовали для описания «мгновенных» перестроек структуры решений дифференциальных уравнений. Сейчас «нестандартные методы» проникли в комплексный анализ, теорию чисел, алгебраическую геометрию, даже в некоммутативную геометрию, самый модный и стремительно развивающийся раздел современной математики. Впрочем, создатель некоммутативной геометрии Ален Конн (Alain Connes) высказывался о нестандартном анализе довольно резко. Причина (которую не отрицают, похоже, и энтузиасты нестандартной математики) — практически все, что удалось сделать с помощью этого аппарата, можно сделать и без него. Судя по обзору И. Фесенко (www.maths.nott.ac.uk/personal/ibf/rem.pdf), нестандартные методы сегодня рассматриваются скорее как «путеводная звезда» при поиске новых подходов к задачам. ■



МНОЖЕСТВО МАНДЕЛЬБРОТА, ОДНА ИЗ РАЗНОВИДНОСТЕЙ КОТОРОГО ИЗОБРАЖЕНА НА РИСУНКЕ, ВИДИМО, САМЫЙ ПОПУЛЯРНЫЙ ПРИМЕР ФРАКТАЛА

го числа частей, каждая из которых — уменьшенная и слегка измененная копия объекта в целом. Самоподобие же почему-то встречается во всевозможных структурах нашего лучшего из миров — причем именно в таких, которые трудно описать гладкими функциями классического анализа. Например, фрактальный лист папоротника (рис. справа внизу) очень похож на настоящий. Задать такую форму можно либо с помощью длиннейших (но совершенно неинформативных в данном случае) рядов по синусам и косинусам, либо с помощью очень простого фрактального процесса, в явном виде учитывающего самоподобие этого листочка (а он состоит из трех уменьшенных копий самого себя: двух нижних веточек и того, что останется, если их отрезать). Папоротник тут не случаен — фрактальные модели (так называемые L-системы) построены для множества видов растений. Классик науки о фракталах Бенуа Мандельброт (если не ошибаюсь, он и ввел термин «фрактал») в начале 1960-х обнаружил фрактальные (в усредненном, статистическом смысле) структуры не где-нибудь, а в финансовых рядах — графиках колебания цен на рынках. Фрактальный характер имеет и множество других заманчивых объектов и процессов, включая строение Интернета и динамику сетевого трафика, и фрактальные компьютерные модели всего этого разрабатываются весьма активно. Проблема только в том, что построить такую модель для конкретного предмета из реального мира всегда крайне сложно. С формами растений это в целом удалось, а вот с финансовыми рядами — как-то пока не очень (хотя кто знает? может быть, нам не все рассказывают?).

КЛАССИК НАУКИ О ФРАКТАЛАХ БЕНУА МАНДЕЛЬБРОТ В НАЧАЛЕ 1960-Х ОБНАРУЖИЛ ФРАКТАЛЬНЫЕ В СТАТИСТИЧЕСКОМ СМЫСЛЕ СТРУКТУРЫ НЕ ГДЕ-НИБУДЬ, А В ФИНАНСОВЫХ РЯДАХ — ГРАФИКАХ КОЛЕБАНИЯ ЦЕН НА РЫНКАХ

Сами же фрактальные модели обычно представляют собой процессы последовательного измельчения и перемешивания исходных заготовок в соответствии с коротким списком правил. Как раз для точного подсчета (или отсчета?) того, что еще осталось от исходной заготовки после бесконечного числа таких шагов, Сергеев и использовал свои новые числа — в качестве иллюстрации их потенциальных возможностей.

Пример простого фрактального процесса — построение классического канторова множества. Заготовка — отрезок [0, 1]. Первый шаг — выбрасываем (Гринуэй, может быть, сказал бы — топим) среднюю треть этой заготовки. Получаем уже два отрезка, но маленьких: [0, 1/3] и [2/3, 1]. Затем топим (пардон, стираем) среднюю треть у каждого из этих двух, затем — у каждого из полученных четырех, и так далее. Ясно, что при рисовании на мониторе оставшиеся отрезки скоро станут меньше пикселов, и ничего кроме пустого экрана этот фрактальный процесс не даст (зато при другом выборе заготовок и операций с ними мы могли бы получить ветку сирени или реалистичный горный ландшафт).

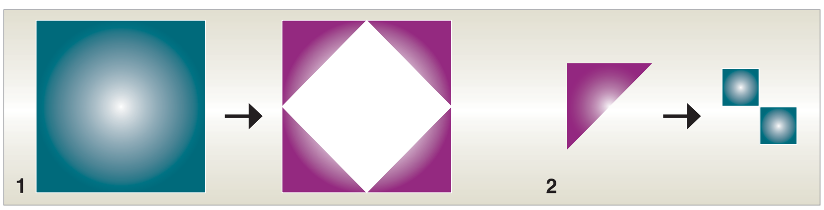
Однако с точки зрения чистой математики в пределе остается отнюдь не пустота. Предельное *канторово множество* — трудновообразимый континуум (то есть нечто эквивалентное исходному отрезку!), все связи между точками которого разорваны выбрасыванием бесчисленных крошечных отрезков.

С использованием разложения по гросс-единицам Сергеев описывает этот процесс (и его результат) иначе. На n-м шаге процесса имеется 2^n отрезков, каждый длиной 3^{-n}. Стало быть, после ① шагов бесконечно большое количество отрезков будет равно ($2^{\text{①}}$), а их общая длина выразится бесконечно малым числом ($(2/3)^{\text{①}}$). Эти выражения — точная характеристика фрактального множества, которая изменится при других параметрах порождающего процесса (если топить больше, или меньше, да еще и в других местах). Разумеется, аналогичные характеристики есть и в классике — например, фрактальная размерность, которая в данном случае равна log(2)/log(3). Но в классике лишен, конечно, смысла вопрос, насколько отличаются результаты последней и предпоследней из некоторого бесконечного числа итераций. Через новые числа это легко выразить: так, на шаге ①-1 общая длина отрезков равна $(2/3)^{(\text{①}-1)}$.

Однако в новой системе невозможно пересчитать все полученные отрезки: ведь их будет ($2^{\text{①}}$), то есть строго больше, чем ①. А мы помним постулат, что любой процесс, в том числе и процесс последовательного счета, не может использовать более ① шагов. Зато здесь можно точно подсчитать число точек (!) в множестве, полученном после бесконечного числа шагов. Дело в том, что само понятие точки теперь сильно отличается от классического. «Как только мы выбрали символы для записи чисел, выражающих координаты точек, — поясняет Ярослав Сергеев, — мы определили понятие «точка» и можем легко сосчитать число этих точек. Более мощная система записи (например, система (1)) позволит нам увидеть больше точек, а более слабая (традиционная) — меньше».

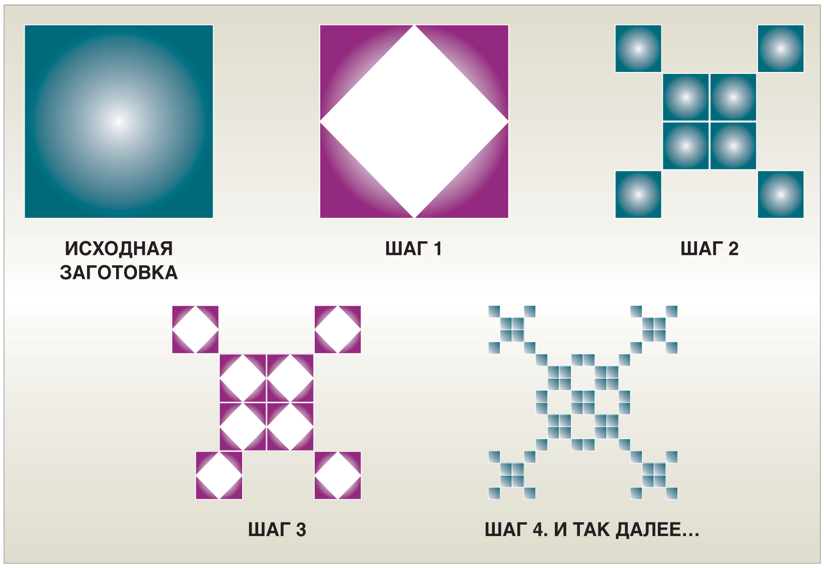
ПОНЯТИЕ «ТОЧКА» ДЛЯ НОВОЙ ЧИСЛОВОЙ СИСТЕМЫ СИЛЬНО ОТЛИЧАЕТСЯ ОТ КЛАССИЧЕСКОГО. НОВАЯ СИСТЕМА ПОЗВОЛЯЕТ «УВИДЕТЬ» БОЛЬШЕ ТОЧЕК, БЛАГОДАРЯ ЧЕМУ УДАЕТСЯ ИЗБЕЖАТЬ КОНТРИНТУИТИВНЫХ ПАРАДОКСОВ

Обратимся, наконец, к давно обещанным мерцающим фракталам. Мерцание заключается в том, что фрактальный процесс генерирует не одно, а несколько множеств. В данном случае их два, а процесс задан схемой:



Начав с синего квадрата, получаем на последовательных шагах такую динамику двух зависимых друг от друга множеств (см. схему вверху).

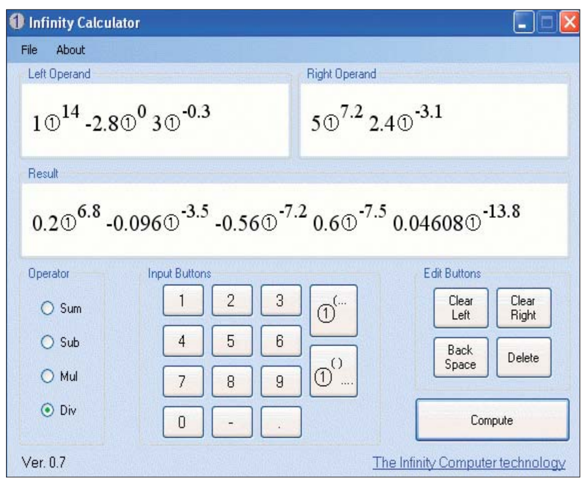
На четных шагах мы видим фигуру из синих квадратов, на нечетных — другую, составленную из красных треугольников. Описание динамики этого процесса в новой арифметике состоит в подсчете



площади каждой фигуры на любом из шагов в процессе ее построения. Например, возьмем шаг ①/2 — это четное бесконечное число, поэтому фигура в этот момент состоит из $2^{(3\text{①}/4)}$ синих квадратов с общей бесконечно малой площадью $2^{(-\text{①}/4)}$. На следующем шаге номер (①/2)+1 площадь фигуры из красных треугольников будет равна $2^{-\text{①}/4+1}$, и т. д. Вот так бесконечные числа описывают динамику этого мерцающего процесса — казалось бы, не имеющего предела в классическом смысле, подобно ряду 1, −1, 1, −1, …, 1.[1]

В заключение — скриншот «калькулятора бесконечности», построенного на основе уже работающего софтверного симулятора «компьютера бесконечности». Может быть, когда-нибудь мы увидим «компьютер бесконечности», реализованный в железе. Но это зависит от того, станет ли новая арифметика бесконечных чисел незаменимым инструментом решения сложных задач.

Ну а совсем в заключение — просим не рассматривать эту публикацию как сигнал о нашей



особой заинтересованности в сочинениях именно на такие, фундаментальные и в то же время экзотические темы. Впрочем, независимо от тематики, мы пишем только о том, что прошло апробацию в солидной научной периодике, на серьезных конференциях и семинарах. Увлекательная работа Ярослава Сергеева именно такова. ■

1 Впрочем, аналогия тут не совсем полная.

Добротная бесконечность против QWERT

Как полагает Леонид Левкович, ответ на вопрос об эффективности предложенной Ярославом Сергеевым принципиально новой числовой системы даст история. Разумеется, история всех нас рассудит, но обязаны ли мы с нею соглашаться?

Идеи Сергеева кажутся мне по научным меркам вполне добротными, интересными и уже неплохо проработанными, но реакция сообщества на них, увы, довольно слабая (пока?). О чем это говорит?

Сеймур Пейперт, известный в компьютерном мире прошлого века прежде всего как создатель «черепашьей графики», назвал некоторые суждения истории феноменом «QWERT» — по буквам первого ряда на латинской клавиатуре пишущей машинки. Никто не может проверить, является ли такое «разложение» букв по клавишам в каком-либо смысле оптимальным. Эту проверку можно было бы устроить только в рамках альтернативной истории, где другая система была бы столь же привычной, как наша «QWERT», и столь же обеспеченной с детства доступными предметами окружающей среды. Тогда, если бы мы сравнили скорость, количество ошибок и тому подобные показатели уравненных по важным качествам групп из культур «QWERT» и, скажем, «TREWQ», в нашем лице история сделала бы (возможно, впервые) обоснованное суждение. В настоящей же ситуации история только зафиксировала необратимый культурный выбор, один из тысяч подобных[1].

Другой пример. Никто не скажет, что английский язык является наилучшим языком для выражения мысли. Известный в лингвистике тезис Сепира–Уорфа утверждает, что «объективный» мир, с которым имеет дело человек, в значительной степени определяется особенностями языка, на котором человек говорит и с помощью которого мыслит. Психологи недавно провели эксперимент, показавший, что одну и ту же последовательность сцен (скажем, мультфильм) люди, говорящие на немецком и на английском языках, описывают по-разному: англичане выделяют в несколько раз больше эпизодов и описывают их как текущие действия (часто употребляя очень удобный для этого английский герундий), носители немецкого языка выделяют эпизоды более длинные и приводящие к какому-то результату[2] (вспомним, что существительные в немецком языке пишутся с заглавной буквы). Выбирая в качестве языка международного общения английский, мы предрешаем кое-что в содержании наших знаний, по-видимому, утрачивая какие-то возможности, доступные при ином выборе. Но нынче разумно учить английский — поскольку он наиболее употребителен. Вот и Сергеев пишет по-английски, а не на языке итальянских прачек, на котором писал Галилей.

Читая в его статье о том, что количество четных чисел вдвое меньше, чем всех натуральных, я испытываю чувство, обратное тому, которое испытал на первом курсе мехмата, когда лектор с непринужденным видом, но все же явно рассчитывая на эффект, сообщил, что четных чисел столько же, сколько натуральных. Я понял, что он глубоко прав и что придется с ним согласиться и думать, как он. Но бывший школьник во мне сделал заметочку в дальнем углу памяти, что этой правде где-то должна быть не менее глубокая альтернатива. Теперь она явилась — и признаюсь, я испытываю некоторое облегчение.

РИСУНОК ЯРОСЛАВА СЕРГЕЕВА

Однако теперь я понимаю, что результаты, полученные в рамках канторовского подхода, не являются утверждениями об объективном мире и поэтому не могут быть ложными. Канторовский способ видеть мир порождает массу интересных вопросов и целую культуру рассуждений о них. Очень сомнительно, чтобы подход Сергеева помог решить какие-то из этих вопросов.

С другой стороны, в практике применяется, конечно, не теорема Банаха–Тарского, позволяющая легко удваивать футбольные мячи. Просто воспроизводство инженеров и других «практических реализаторов» математической мысли в настоящее время связано традиционной цепочкой с воспроизводством «канторовских» математиков. Эта связь — феномен «QWERT». По моему собственному мнению, матанализ для практиков надо рассказывать без теоретико-множественных тонкостей, примерно на уровне второй половины XVIII века[3], но и бесконечность по Сергееву здесь вряд ли понадобится.

Таким образом, подход Ярослава Сергеева занимает пока нишу между теми и другими: для успеха, по-видимому, нужно встречное движение со стороны более практически ориентированных математиков-прикладников, которые в подходе Сергеева обнаружат что-то родственное своим еще не нашедшим выражения мыслям (подобно моему упомянутому выше чувству, которое, увы, не может иметь практических последствий).

Со своей стороны могу только пожелать успеха этому труду — о его добротности я уже не раз говорил в профессиональном кругу, к которому принадлежу. Если же история рассудит неблагоприятным для него образом — тем хуже для истории. ■

Анатолий Кричевец,
доктор философских наук, специалист по философии математики

1 С. Пейперт известен также написанной в соавторстве с М. Минским книгой «Перцептроны» (М.:, Мир, 1971), в которой был подвергнут разгрому нейросетевой (в современных терминах) подход к моделированию человеческого восприятия.
2 Величковский Б.М., Когнитивная наука. В 2-х. т.. — М.:, Смысл, 2006.
3 Кричевец А.Н., Дьячков А.Г., Шикин Е.В., Математика для психологов. — М.:, Флинта, 2006.